

## ПРИМЕНЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО АНАЛИЗА МАТРИЦЫ ЯКОБИ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ НАДЁЖНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Автор: Белов Евгений Игоревич, инженер, АО «НТЦ ЕЭС», отдел противоаварийной автоматики, лаборатория локальных комплексов противоаварийной автоматики.

### Введение

Опыт расчетов установившихся режимов работы электроэнергетических систем (ЭЭС) показывает, что, как всякая сложная система, ЭЭС неоднородна и неравнопрочна. Примером проявления данных свойств может служить тот факт, что параметры режима некоторых элементов ЭЭС (узлов, связей) в среднем относительно сильнее реагируют на возмущения, чем других элементов. Более того, возмущения, возникающие в разных местах ЭЭС, вызывают заметную реакцию одних и тех же параметров режима: при разной локализации возмущений больше всего изменяются модули напряжения в одних и тех же узлах, перегружаются по току одни и те же ветви. Информация о том, как электроэнергетические системы реагируют на возмущения и каким образом проще всего изменить характер этой реакции, может быть использована для повышения надёжности функционирования электроэнергетических систем путём снижения неоднородности ЭЭС и, как следствие, улучшения поведенческих свойств ЭЭС (управляемости, контролируемости), снижения потенциальной возможности возникновения аварийных ситуаций и снижения вероятности нарушения электроснабжения потребителей.

### Сингулярный анализ матрицы Якоби

Установившийся режим работы любой ЭЭС может быть описан с помощью системы нелинейных алгебраических уравнений. Одним из способов представления этой системы уравнений является запись уравнений в форме баланса мощности [1]. Из них может быть получена матрица Якоби, элементы которой в общем случае представляют собой частные производные баланса мощности по параметрам режима:

$$J_{ps} = \begin{pmatrix} \frac{\partial W_P}{\partial \delta} & \frac{\partial W_P}{\partial U} \\ \frac{\partial W_Q}{\partial \delta} & \frac{\partial W_Q}{\partial U} \end{pmatrix},$$

где  $\frac{\partial W_P}{\partial \delta}$ ,  $\frac{\partial W_P}{\partial U}$ ,  $\frac{\partial W_Q}{\partial \delta}$ ,  $\frac{\partial W_Q}{\partial U}$  – квадратные блоки-подматрицы матрицы  $J_{ps}$ , являющиеся частными производными от мнимой и действительной частей уравнений установившегося режима в форме баланса мощностей по модулю и фазе узловых напряжений.

Элементы обратной матрицы Якоби  $J^{-1} \left( \frac{\partial \delta_i}{\partial P_j}, \frac{\partial \delta_i}{\partial Q_j}, \frac{\partial U_i}{\partial P_j}, \frac{\partial U_i}{\partial Q_j} \right)$  характеризуют степень влияния изменения активных и реактивных нагрузок в узле  $j$  на изменения фаз и модулей напряжений в узле  $i$ .

Сингулярным разложением матрицы Якоби называется представление её в виде произведения трёх матриц:

$$J = W \Sigma V^T = \sum_{i=1}^k w_i \sigma_i v_i^T,$$

где  $W = (w_1, w_2, \dots, w_k)$  и  $V = (v_1, v_2, \dots, v_k)$  – ортогональные матрицы размером  $(k \times k)$ , их  $i$ -е столбцы являются, соответственно,  $i$ -м левым и  $i$ -м правым сингулярными векторами;

$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$  – диагональная матрица сингулярных значений.

Сингулярные числа  $\sigma_i$  матрицы  $A$  численно равны квадратным корням из общих собственных значений  $\lambda_i$  матриц  $A^T A$  и  $AA^T$ :

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^T A)} = \sqrt{\lambda_i(AA^T)}.$$

Расположим сингулярные значения по возрастанию:  $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_k$ . Значение (число), оказавшееся на первом месте, называют минимальным сингулярным значением (минимальным сингулярным числом).

Левый и правый сингулярные векторы, связанные с минимальным сингулярным числом, называются первым левым и первым правым сингулярными векторами ( $w_1$  и  $v_1$ ). Наибольшие изменения модулей и фаз напряжений, связанные с изменением нагрузок, можно ожидать в узлах, соответствующих максимальным компонентам первого правого сингулярного вектора. Элементы ЭЭС (узлы и ветви), параметры режима которых (фазы и модули напряжения, токи) в большей степени изменяются при случайных возмущениях, называются «сенсорные» (чувствительные) элементы или «сенсоры».

Можно показать, что реакция системы на возмущения тем больше, чем меньше минимальное сингулярное значение матрицы Якоби. В связи с этим, чтобы оценить влияние параметров схемы и параметров режима на сенсорность сети, необходимо оценить производную

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial f} = w_1^T \left( \frac{\partial J}{\partial f} \right) v_1.$$

Если в качестве параметра  $f$  выбрать напряжение в узлах электрической сети, то можно определить узел (узлы), изменение напряжения в котором в наибольшей степени отразится на изменении сенсорности. Такие узлы называются «дефинирующими» или «определяющими». В этом случае матрица  $\frac{\partial J}{\partial U}$  будет иметь следующую структуру:

$$\frac{\partial J}{\partial U_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 P}{\partial \delta \partial U_i} & \frac{\partial^2 P}{\partial U \partial U_i} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial \delta \partial U_i} & \frac{\partial^2 Q}{\partial U \partial U_i} \end{pmatrix}.$$

Аналогично, если в качестве параметра  $f$  выбрать проводимость ветви  $Y_B$  или проводимость шунта в узле  $Y_{ш}$ , то результат вычисления производных покажет ветви и узлы, изменение проводимости которых (шунта в которых) больше всего будет изменять величину реакции сети на возмущения (дефинирующие (определяющие) узлы и ветви).

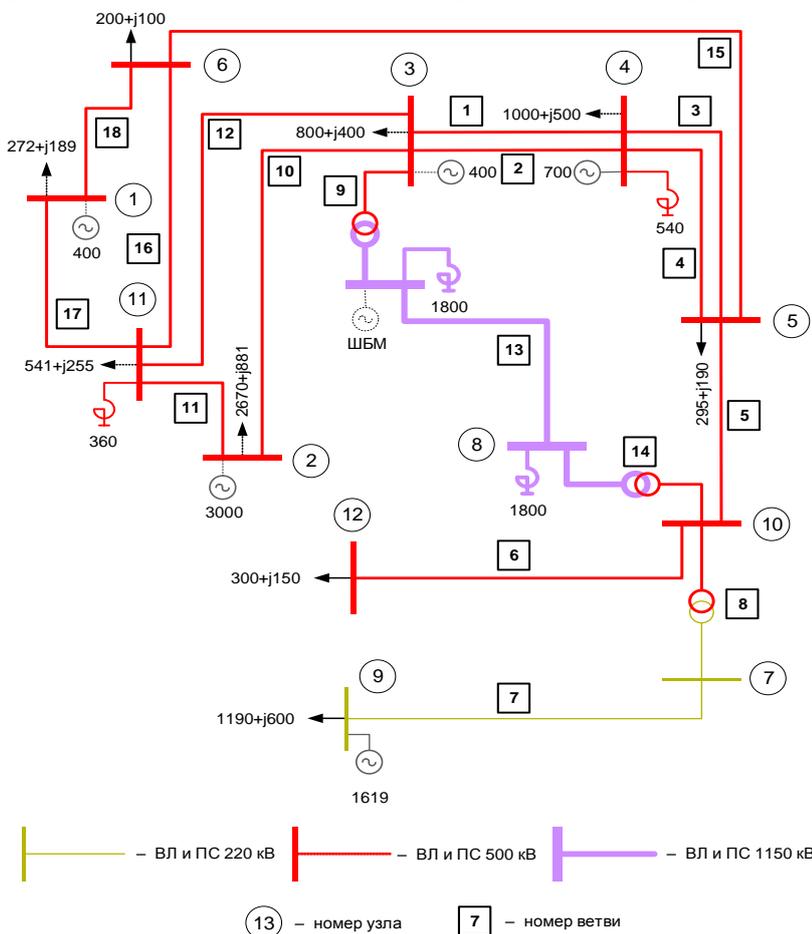


Рис. 1. Схема исследуемой сети

Снижение чувствительности сенсорных узлов происходит с ростом минимального сингулярного значения матрицы Якоби  $\sigma_1$ . При этом максимальное увеличение  $\sigma_1$  происходит при изменении проводимости определяющей ветви или при введении новой ветви между определяющим узлом и узлом, в котором напряжение фиксировано (поддерживается постоянным). Минимальное сингулярное значение матрицы Якоби увеличивается с увеличением проводимости ёмкостного шунта в узлах сети. Наибольшее увеличение следует ожидать при установке шунта в определяющем узле. Аналогичный эффект может быть достигнут при помощи фиксации напряжения в определяющем узле с помощью источника реактивной мощности.

## Практическое применение

На примере энергосистемы, представленной на рис. 1, рассмотрим, для каких практических целей можно применять результаты, полученные с помощью описанного метода.

### 1. Определение критических по напряжению узлов и выбор оптимальной траектории утяжеления



Рис. 2. Значения соответствующих модулям узловых напряжений компонент первого правого сингулярного вектора

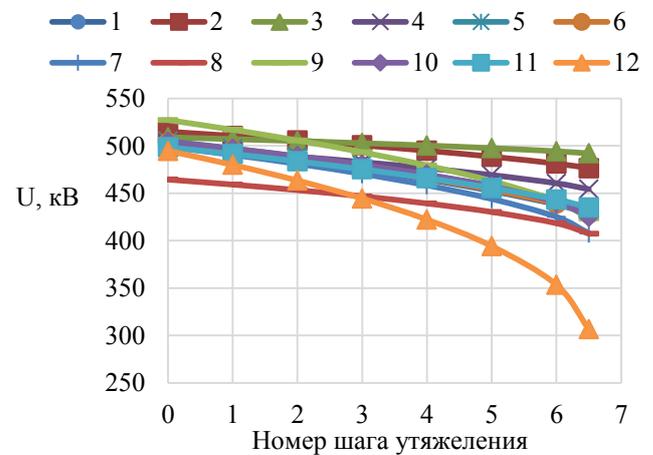


Рис. 3. Напряжение в узлах рассматриваемой схемы сети при одновременном пошаговом утяжелении узлов

Найденные с помощью сингулярного анализа матрицы Якоби сенсорные узлы являются критическими с точки зрения напряжения: при утяжелении режима напряжение в них снижается быстрее, чем в остальных (рис. 2 и рис. 3).

Из рис. 3 видно, что при проведении экспериментальных расчётов в ПК *RastrWin* напряжение снижается быстрее всего в узле 12, а медленнее всего – в узле 3.

Учитывая данное обстоятельство, а также тот факт, что при утяжелении чувствительных узлов предел статической устойчивости по напряжению оказывается наименьшим, при выборе траектории утяжеления целесообразно включать в неё наиболее сенсорные узлы, полученные с помощью сингулярного анализа матрицы Якоби. Полученные таким образом МДП в сечениях будут соответствовать наиболее тяжелому режиму работы электрической сети из всех возможных, то есть выбранные с помощью сингулярного анализа матрицы Якоби траектории утяжеления будут при расчётах МДП давать наименьшие значения.

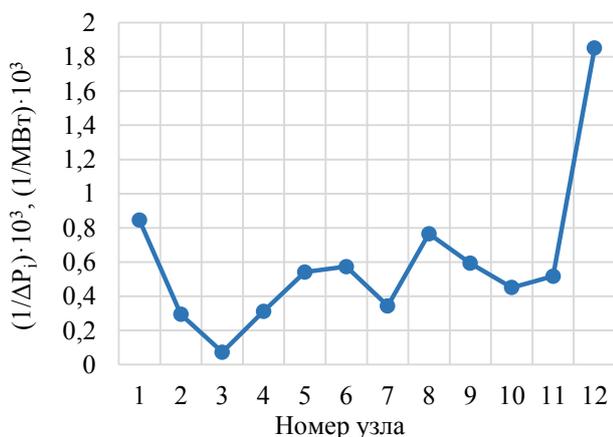


Рис. 4. Величины, обратные приращениям мощности до потери статической устойчивости, для каждого узла

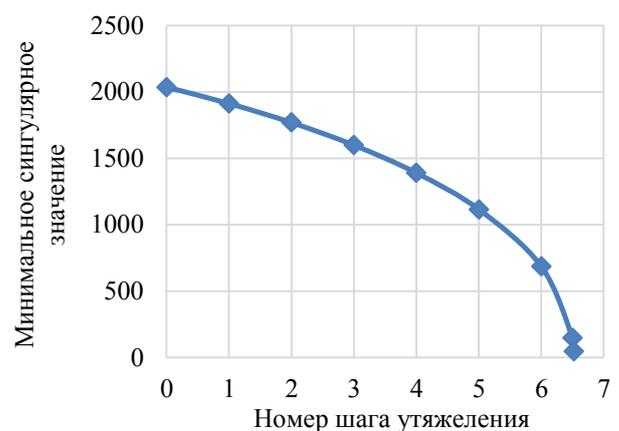


Рис. 5. Зависимость минимального сингулярного значения матрицы Якоби от номера шага утяжеления

Из рис. 4 видно, что для достижения предела устойчивости по напряжению минимальное увеличение нагрузки требуется в узле 12, а максимальное – в узле 3. Данный факт, а также общий вид полученного распределения совпадают с распределением сенсорности по узлам (рис. 2).

## 2. Оценка запаса устойчивости ЭЭС

Можно показать, что минимальное сингулярное значение (МСЗ) матрицы Якоби является индикатором статической устойчивости. С приближением режима к предельному по условию статической устойчивости по напряжению МСЗ снижается до нуля (рис. 5).

Таким образом, МСЗ можно использовать для оценки запасов устойчивости энергосистем, а скорость изменения (снижения) МСЗ в режиме реального времени – для принятия решений о необходимых действиях для предотвращения нарушения устойчивости (в частности, для учёта в логике работы АПНУ).

## 3. Определение наиболее эффективных вариантов сетевого строительства и расстановки СКРМ и УПК с точки зрения снижения чувствительности схемы

Как было отмечено ранее, с помощью вычисления производной МСЗ по проводимостям ветвей и шунтов в узлах можно определить узлы и ветви, изменение параметров которых в наибольшей степени влияет на величину реакции ЭЭС на возмущения (рис. 6 и рис. 7).

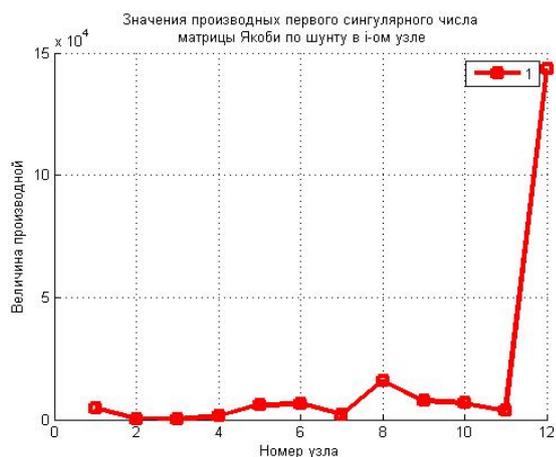


Рис. 6. Производные МСЗ по шунтам в узлах

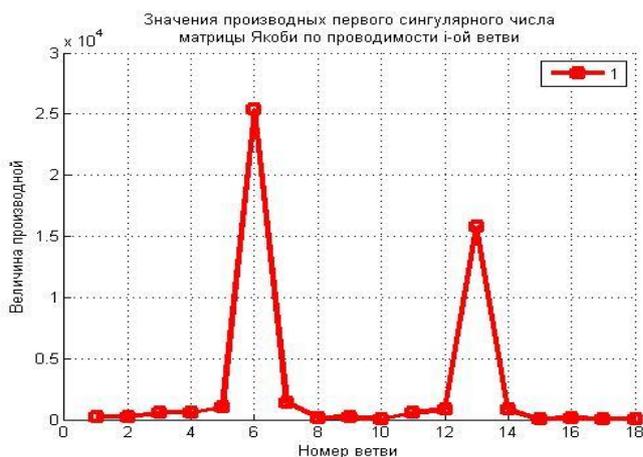


Рис. 7. Производные МСЗ по проводимостям ветвей

Проведя экспериментальные расчёты в ПК *RastrWin*, можно убедиться, что снижение напряжения в узле 8, к примеру, при утяжелении режима уменьшается больше при установке емкостного шунта в узле 12, чем при его установке в узле 5 (рис. 8). Аналогично, снижение напряжения в узле 6 при утяжелении режима уменьшается больше при снижении индуктивного сопротивления ветви 13, чем при снижении сопротивления ветви 15 (рис. 9). То есть результаты эксперимента совпали с результатами вычисления производных МСЗ.

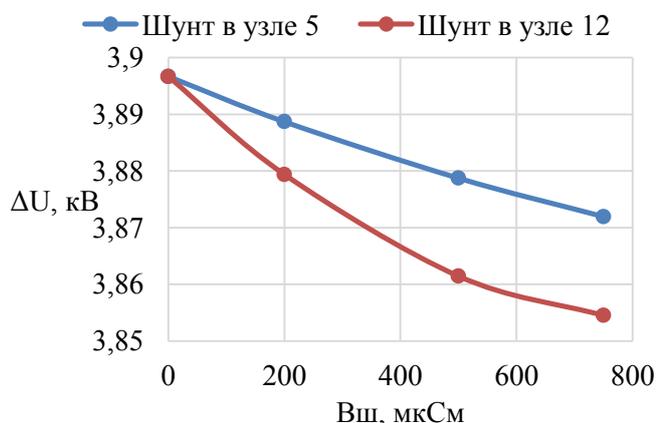


Рис. 8. Изменение снижения напряжения в узле 8 при утяжелении режима для случаев установки шунтов в узлах 5 и 12

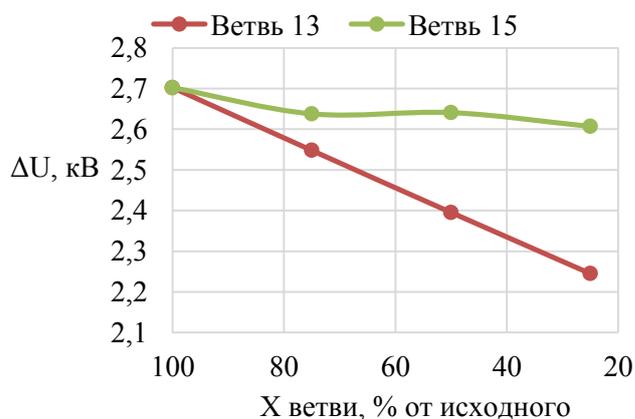


Рис. 9. Изменение снижения напряжения в узле 6 при утяжелении режима для случаев снижения индуктивного сопротивления ветвей 13 и 15

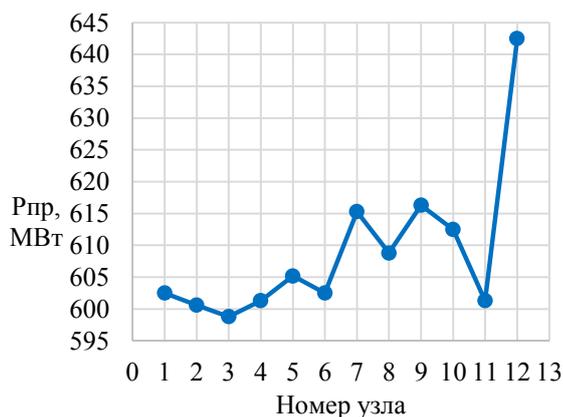
Изменение параметров узлов и ветвей может производиться следующими способами:

1. Установка БСК (КБ) и ШР в узлах.
2. Установка УПК на ЛЭП.

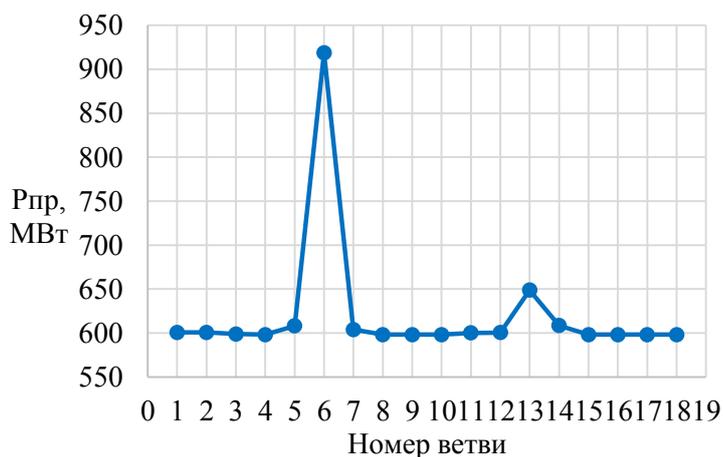
3. Строительство дополнительных цепей ЛЭП (в параллель к существующим).
4. Строительство новых ЛЭП от мощных генерирующих узлов до узлов, изменение параметров которых в наибольшей степени влияет на величину реакции ЭЭС на возмущения (определяющих узлов).

4. Определение наиболее эффективных способов повышения максимально допустимых перетоков (МДП) в контролируемых сечениях по критерию обеспечения нормативных запасов устойчивости в нормальной и ремонтных схемах сети

Мероприятия, приведённые в разделе 3, одновременно с наиболее эффективным снижением чувствительности схемы являются и наиболее эффективными для повышения МДП в контролируемых сечениях по условию сохранения статической устойчивости (рис. 10 и рис. 11).



**Рис. 10.** Зависимость предельной мощности от номера узла, в котором устанавливался шунт



**Рис. 11.** Зависимость предельной мощности от номера ветви, у которой изменялось сопротивление

Из рис. 10 видно, что установка ёмкостного шунта в узле 12 больше всего повышает предельную мощность нагрузки в сенсорном узле (узел 12), что соответствует результатам вычисления производной МСЗ по шунту (рис. 6).

Из рис. 11 видно, что снижение в 2 раза индуктивного сопротивления ветвей 6 и 13 больше всего повышает предельную мощность нагрузки в сенсорном узле (узел 12), что соответствует результатам вычисления производной МСЗ по проводимостям ветвей (рис. 7).

Таким образом, с помощью сингулярного анализа мы можем определить наиболее предпочтительные узлы для установки КБ и ветви для установки УПК с точки зрения максимального повышения МДП в контролируемых сечениях.

5. Разработка адаптивных систем противоаварийной автоматики

Как уже отмечалось выше (раздел 2), для учёта в логике работы АПНУ можно использовать данные о минимальном сингулярном значении матрицы Якоби, которое является индикатором статической устойчивости по напряжению. Кроме того, информацию о чувствительных по фазе напряжении узлах можно использовать для определения связей, по которым наиболее вероятно нарушение статической устойчивости по углу.

При наличии в сети управляемых СКРМ и УПК результаты вычисления производной МСЗ по проводимостям ветвей и шунтов могут помочь выбрать наиболее эффективные управляющие воздействия для повышения МДП (как на этапе организации системы противоаварийной автоматики, так и на этапе оперативно-диспетчерского управления режимами работы электроэнергетической системы).

Для наиболее корректных расчётов МДП в контролируемых сечениях при выборе траектории утяжеления следует учитывать информацию о наиболее сенсорных узлах.

Также информацию о сенсорных узлах целесообразно принимать во внимание при определении мест установки АОСН и АОПН, так как в таких узлах наиболее вероятно возникновение недопустимых режимов с точки зрения напряжения (его недопустимое снижение или повышение).

## 6. Выбор оптимальных вариантов перспективного развития электрических сетей

Использование информации о минимальном сингулярном значении матрицы Якоби, сенсорных узлах, определяющих узлах и ветвях представляется полезным в ходе проектирования развития электроэнергетических систем для выбора оптимального варианта развития на основе технико-экономического сопоставления вариантов.

### **Заключение**

Настоящая работа посвящена вопросу нахождения в электроэнергетической системе элементов, которые в среднем больше других реагируют на внешние и внутренние возмущения режима работы, а также элементов, изменение параметров которых наибольшим образом сказывается на изменении величины реакции всей ЭЭС и её отдельных элементов на такие возмущения. Исследования проводятся с помощью сингулярного анализа матрицы Якоби.

Закономерности, полученные с помощью данной методики, подтверждены экспериментальными расчётами режимов работы тестовой сети в ПК *RastrWin*.

Также предложены возможные способы практического применения результатов сингулярного анализа матрицы Якоби, вычисления минимального сингулярного значения матрицы Якоби и его производных по проводимостям ветвей и шунтов в узлах схемы для решения практических задач в электроэнергетике. Результаты, полученные с помощью указанных методов, могут быть использованы как в ходе оперативно-диспетчерского управления, так и при проведении проектно-изыскательских и внестадийных работ, связанных с развитием электроэнергетических систем, а также систем локальной и централизованной автоматики, способствуя повышению надёжности функционирования электроэнергетических систем.

Основным преимуществом рассмотренной методики является то, что сингулярный анализ матрицы Якоби позволяет на основе структуризации исходной схемы ЭЭС и ее параметров выявить характерные свойства энергосистемы без проведения традиционных трудоемких расчетов режимов. Таким образом, значительно снижается объем вычислительной работы при исследовании ЭЭС.

### **Литература:**

1. *Войтов О. Н., Воронай Н. И., Гамм А. З., Голуб И. И., Ефимов Д. Н.* Анализ неоднородностей электроэнергетических систем. Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН. 1999. – 236 с.
2. *Гамм А.З., Голуб И.И.* Обнаружение слабых мест в электроэнергетической системе // Известия РАН. Энергетика, 1993, №3. – С. 83–92.
3. *Агарков О. А., Войтов О. Н., Воронай Н. И., Гамм А. З., Голуб И. И.* Два подхода к анализу слабых мест электроэнергетических систем // Известия РАН. Энергетика. – М.: Высш. шк., 1985. – 536 с.
4. *Гуревич Ю. Е., Либова Л. Е., Окин А. А.* Расчеты устойчивости и противоаварийной автоматики в энергосистемах. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 390 с.
5. *Евдокунин Г. А.* Электрические системы и сети: Учебное пособие для студентов электроэнергетических специальностей вузов. СПб.: Издательство Сизова М. П., 2001. 304 с.
6. *Идельчик В. И.* Расчеты и оптимизация режимов электрических сетей и систем/ В.И. Идельчик.–М.: Энергоатомиздат, 1988.
7. *Идельчик В. И.* Электрические системы и сети: Учебник для вузов. – М.: Энергоатомиздат, 1989.
8. *Неуймин В. Г., Машалов Е. В., Александров А. С., Багрянцев А. А.* Программный комплекс «RastrWin3». Руководство пользователя. – 2014. – 271 с.
9. *Рокотян С. С., Шапиро И. М.* Справочник по проектированию электроэнергетических систем. – М.: Энергоатомиздат, 1985.